معادلات فريدهولم التكاملية

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

المعادلة المتجانسة

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad (2)$$

تعريف: تسمى القيمة $\lambda = \lambda_0$ التي تقبل من أجلها المعادلة التكاملية المتجانسة (2) تقبل حلاً غير الحل الصفري $g(x) \neq 0$ بالقيمة الخاصة للنواة $K(x,t)$ أو القيمة خاصة للمعادلة التكاملية الموافقة وتسمى كل حل للمعادلة التكاملية:

$$g(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad (3)$$

مختلفاً عن الصفر تابعاً خاصاً للقيمة الخاصة الموافقة

ملاحظة: في بعض الأحيان تسمى القيمة الخاصة $\lambda = \lambda_0$ بالقيمة المميزة للنواة $K(x,t)$ أو بالقيمة الذاتية

ومما تجدر تنبيه أن العدد $\lambda_0 = 0$ لا يمكن أن يكون قيمة خاصة للمعادلة التكاملية المعطاة لأنه ينتج من (3) أن $g(x)$ يطابق الصفر $g(x) = 0$

وإذا كانت $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ توابع خاصة موافقة للقيمة الخاصة $\lambda = \lambda_0$ عندئذٍ يحقق (حسب خطية المعادلة التكاملية (3) وتجانسها) كل تركيب خطي من هذه التوابع لأمثال عددية ثابتة

$$g(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots + c_m g_m(x) \quad (4)$$

بالتالي يكون هذا التركيب (إذا لم تكن جميع الأمثال أصفاراً) تابعاً خاصاً كذلك

وإذا كانت التوابع الخاصة $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ مستقلة خطياً عندئذٍ لا يطابق التابع $g(x)$ الصفر ما لم تكن جميع الأمثال مطابقة للصفر

طريقة التقريبات المتتالية لحل معادلة فريدهولم التكاملية (النواة الحالة)

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

سوف نبحث عن حل (1) على شكل سلسلة حسب قوى λ

$$g(x) = g_0(x) + \lambda g_1(x) + \lambda^2 g_2(x) + \dots + \lambda^n g_n(x) \quad (2)$$

إذا كانت السلسلة متقاربة بانتظام بخصوص x في المجال $[a,b]$ (سوف نثبته فيما بعد) عندئذٍ يمكننا إذا عوضنا المعادلة (2) في (1) أن نكامل حداً حداً. نبدل (2) في (1) فنحصل

$$g_0(x) + \lambda g_1(x) + \dots + \lambda^n g_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\left[g_0(t) + \lambda g_1(t) + \dots + \lambda^n g_n(t)\right] dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, g_0(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t)\, g_1(t)\, dt + \dots + \lambda^n \int_a^b K(x,t)\, g_n(t)\, dt$$

$$g_0(x) = f(x)$$
$$g_1(x) = \int_a^b K(x,t)\, g_0(t)\, dt \quad (3)$$
$$g_2(x) = \int_a^b K(x,t)\, g_1(t)\, dt$$

$$g_n(x) = \int_a^b K(x,t)\, g_{n-1}(t)\, dt \quad (4)$$

ان التوابع $g_n(x)$ مستمرة وسنبرهن فيما يلي ان السلسلة ② متقاربة بانتظام اذا كانت القيمة المطلقة لـ λ صغيرة بقدر كاف وعندئذ ينتج ان مجموع السلسلة هو تابع مستمر في اجل هذه القيمة لـ λ وانه يمثل حلاً للمعادلة التكاملية المعطاة ①

لدينا $f(x)$ تابع مستمر في المجال $[a,b]$ والنواة $K(x,t)$ مستمرة في المربع K_0 $(a \le x \le b \quad a \le t \le b)$

عندئذ التقديرات التالية تكون صحيحة اعلاه ان

$$|f(x)| \le m \qquad |K(x,t)| \le M$$

وذلك بفرض m,n عددين موجبين هما فيه القيمة العظمى الاعظميات لـ $|f(x)|$ و $|K(x,t)|$ واذا قدرنا التوابع $g_n(x)$ فإننا نحصل على التالي

- $|g_0(x)| = |f(x)| \le m$
- $|g_1(x)| \le \int_a^b |K(x,t)||g_0(t)|dt \le Mm\int_a^b dt = mM(b-a)$
- $|g_2(x)| \le \int_a^b |K(x,t)||g_1(t)|dt \le M^2 m(b-a)\int_a^b dt = mM^2(b-a)^2 \le m(M(b-a))^2$

بشكل عام نجد ان

$$g_n(x) \le m[M(b-a)]^n$$

نضرب الطرفين بـ $|\lambda^n|$ ⟸

$$|\lambda^n||g_n(x)| \le m|\lambda^n|[M(b-a)]^n$$

ومن هنا ينتج ان السلسلة ② تكون بالخصوص متقاربة اطلاقاً بانتظام اذا كان

$$|\lambda| \le \frac{1}{M(b-a)} \quad ⑤$$

ويكون مجموعها حلاً مستمراً للمعادلة التكاملية المعطاة ①

و يبرهن ان الشرط ليس شرطاً لازماً فقط بل هو شرطاً كافياً لقابلية الحل للمعادلة التكاملية ①

طريقة ثانية لحل المعادلة ① بالاعتماد على النواة الحالة او التابع الحال $R(x,t,\lambda)$

في تعريف النوى المكررة والتي تعرف بالعلاقات التدريجية الآتية

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_{n-1}(x,t_1)K(t_1,t)\,dt_1 \qquad n = 2, 3, \dots$$

للتطبيقات العملية

ملاحظة: يمكن اخذ النوى المكررة على الشكل التالي

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_{n-1}(t_1,t)\,K(x,t_1)\,dt_1$$

للتطبيقات النظرية

بما ان النواة الاصلية $K(x,t)$ مستمرة فإن كل نواة مكررة تكون مستمرة في المربع K_0

ويمكن التعبير عن نواة متكررة $K(x,t)$ بدلالة النواة الاصلية $K_n(x,t)$ وذلك بالاشارة $n-1$ تعطى سيما

وايضاً السلسلة المسماة سلسلة نيومان

$$R(x,t,\lambda) = K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \cdots$$

او

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t)$$

هذه السلسلة عبارة عن التابع الحال

ويمكن التعبير عن التوابع $g_n(x)$ بدلالة التوابع المفروضة $f(x)$ فوراً وذلك كمايلي

$$g_1(x) = \int_a^b K(x,t) f(t)\, dt = \int_a^b K_1(x,t) f(t)\, dt$$

$$g_2(x) = \int_a^b K(x,t) g_1(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(x,t) K(t,t_1) f(t_1)\, dt_1\, dt$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t) K(t,t_1)\, dt\right] f(t_1)\, dt_1$$

ومن تعريف النواة المكررة نحصل على

$$g_2(x) = \int_a^b K_2(x,t) f(t)\, dt$$

هنا بدلنا التكامل الداخلي كل t بـ t_1 وكل t_1 بـ t

وبشكل عام

$$g_n(x) = \int_a^b K_n(x,t) f(t)\, dt \qquad n = 1, 2, \ldots$$

وبتعويض هذه العبارات في السلسلة ② نحصل على

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,t) f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,t) f(t)\, dt + \cdots$$

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left[K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \cdots\right] f(t)\, dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \sum \lambda^n K_{n+1}(x,t) f(t)\, dt$$

بالاعتماد على تعريف التابع الحال نحصل على:

$$g(x) = f(x) + \int_a^b R(x,t,\lambda) f(t)\, dt$$

تطبيق عملي

اوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = e^{2x} + \lambda \int_0^1 e^{x-t} g(t)\, dt \qquad ①$$

مستخدماً النواة الحالة (التابع الحال)

الحل: حل هذه المعادلة يعطى بالعلاقة

$$g(x) = f(x) + \int_0^1 R(x,t,\lambda) f(t)\, dt$$

$$g(x) = e^{2x} + \lambda \int_0^1 R(x,t,\lambda) e^{2t}\, dt$$

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t)$$

$$= K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \cdots$$

$$K_1(x,t) = K(x,t) = e^{x-t}$$

$$K_n(x,t) = \int_a^b K_{n-1}(x,t_1) K(t_1,t)\, dt_1$$

$$n=2 \Rightarrow K_2(x,t) = \int_0^1 K_1(x,t_1) K(t_1,t)\, dt_1$$

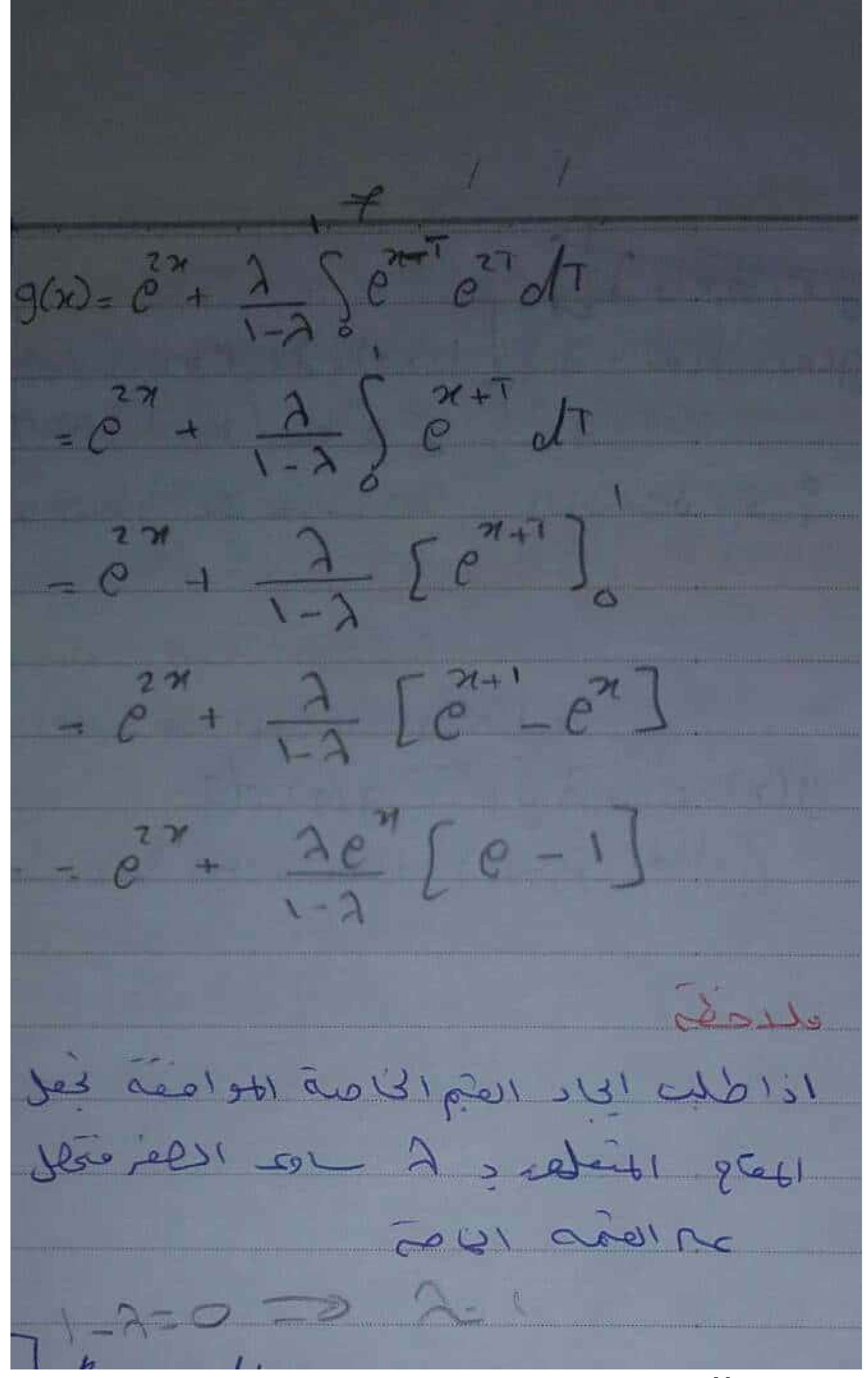
$$K_2(x,t) = \int_0^1 e^{x-t_1} e^{t_1-t}\, dt_1 = e^{x-t}$$

$$n=3 \Rightarrow K_3(x,t) = \int_0^1 K_2(x,t_1) K(t_1,t)\, dt_1$$

$$K_3(x,t) = \int_0^1 e^{x-t_1} e^{t_1-t}\, dt_1 = e^{x-t}$$

$$R(x,t,\lambda) = e^{x-t}\left[1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots\right]$$

$$= e^{x-t} \frac{1}{1-\lambda} \qquad |\lambda| < 1$$



$$g(x) = e^{2x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 e^{x-\tau} e^{2\tau}\, d\tau$$

$$= e^{2x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 e^{x+\tau}\, d\tau$$

$$= e^{2x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}\left[e^{x+\tau}\right]_0^1$$

$$= e^{2x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}\left[e^{x+1} - e^{x}\right]$$

$$= e^{2x} + \frac{\lambda e^{x}}{1-\lambda}\left[e - 1\right]$$

ملاحظة

اذا طلب ايجاد القيم الخاصة المرافقة نجعل المقام المتعلق بـ λ يساوي الصفر نتحصل على القيمة الخاصة

$1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1$